



Sélection OFM 2025
Mercredi 30 Octobre 2024 || Durée 03h

Notes importantes : L'épreuve est constituée de 8 exercices répartis en quatre thèmes. Les premiers exercices par thème sont notés sur 4pts et les seconds sur 6pts. Le candidat est invité à justifier **rigoureusement** toute ou partie de solution. Une attention sera accordée à toute rédaction, même inachevée. N'hésitez donc pas à écrire vos idées...

Par ailleurs, chaque candidat doit préciser ses NOMS et PRÉNOMS, sa DATE de NAISSANCE (xx/xx/20..), son ÉTABLISSEMENT, sa CLASSE et sa VILLE.

A-Algèbre

A.1 Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + a_0$, un polynôme de degré $n \geq 1$.

À ce polynôme P on associe un nouveau polynôme Q , défini par $Q(X) = P(X - \frac{a_{n-1}}{n})$.

Soit λ le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture du polynôme Q . Déterminer λ .

A.2 Résoudre le système d'équations suivant dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 219 \\ xy + \frac{1}{xy} = \frac{1297}{36} \end{cases}$$

T-Théorie des nombres

T.1 Soit m un entier naturel, et Σ l'ensemble des entiers naturels de la forme $x^2 + my^2$, où x et y sont des entiers.

Prouver que si $a \in \Sigma$ et $b \in \Sigma$, alors $ab \in \Sigma$.

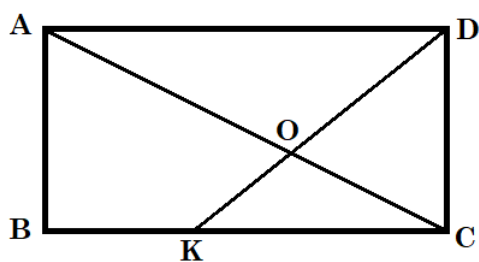
T.2 Soient a, b et c des nombres réels tels que :

$$a + b + c = 2; \quad ab + bc + ac = -7 \quad \text{et} \quad abc = 37$$

Calculer $a^3 + b^3 + c^3$.

G-Géométrie

G.1 Soit le rectangle $ABCD$ ci-dessous :



Sachant que $\text{Aire}(AOD) = 9$ et $\text{Aire}(KOC) = 4$, calculer $\text{Aire}(ABKO)$

G.2 Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Les points P, Q, M, N sont respectivement sur les cotés AB, BC, CD et DA , tel que $AP + AN + CQ + CM = 2$.

Montrer que $(PM) \perp (QN)$.

C-Combinatoire

C.1 Un jeune homme vient d'acquérir un chat. Il souhaite nommer ce chat avec un nom de trois lettres de l'alphabet, de manière à ce que les lettres soient classés par ordre alphabétique, sans répétition de lettres, en alternant les voyelles et les consonnes. Combien de tels noms peut-il former ?

C.2

Dans un tournoi, chaque joueur a joué exactement une partie contre chacun des joueurs. Dans chaque partie, le vainqueur recevait 1 point, le perdant 0 point et chacun des deux joueurs gagnait $\frac{1}{2}$ point en cas d'égalité. Après le tournoi, il a été constaté qu'exactly la moitié des points gagnés par chaque joueur avaient été gagnés lors de matchs contre les dix joueurs ayant le moins de points. Quel était le nombre total de joueurs dans le tournoi ?