TEST DE SELECTION AUX OFM
(Olympiades Francophones de Mathématiques)
Samedi, 06 février 2021
Durée 04 Heures

Le présent test est constitué de 10 exercices notés chacun sur 5 points. Chaque exercice, même inachevé, sera pris en compte dans la notation ; donc chaque candidat est invité à proposer toute ou partie de solution.

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) suivante :

$$|-3x+4|+|-5+x|=10$$

EXERCICE 2

Trouver tous les couples (p,q) de nombres premiers pour lesquels les nombres $2p+q$, $p+2q$ et $p+q-18$ sont tous les trois des nombres premiers.

On rappelle qu'un nombre premier est un entier supérieur ou égal à 2, qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

EXERCICE 3

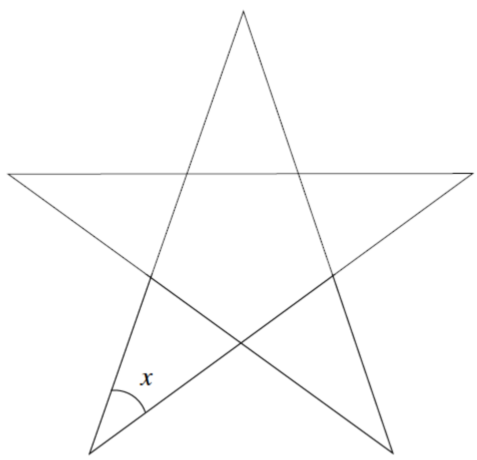
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On suppose que $AI = BC$ et que $\widehat{ICA} = 2 \times \widehat{IAC}$.
Quelle est en radians, la valeur de $\widehat{ABC}$?

EXERCICE 4

Calculer la somme suivante : $S_{500} = \dfrac{1}{2^{500}} \displaystyle\sum_{k=0}^{500} kC_{500}^{k}$ où C_{500}^{k} désigne le nombre de combinaisons de k dans 500.

EXERCICE 5

On considère l'étoile régulière à cinq branches suivantes. Déterminer en radians, la valeur x de l'angle désigné.



EXERCICE 6

Ici, nous admettons l'inégalité arithmético-géométrique suivante : $1+\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, pour tous $x>0$.

Soient a, b et c des réels positifs tels que $a+b+c=3$. Montrer que $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 8$

EXERCICE 7

Un entier $n \geq 2$ est dit académique si on peut répartir les entiers $1, \cdots, n$ en deux groupes disjoints S et P de sorte que la somme des nombres de S soit égale au produit des nombre du groupe P.

(a) Montrer que 7 est académique.

(b) Montrer que pour $n \geq 7$, n est académique.

EXERCICE 8

Montrer que le nombre $10^{2019}+10^{2020}+10^{2021}$ est un multiple de 37.

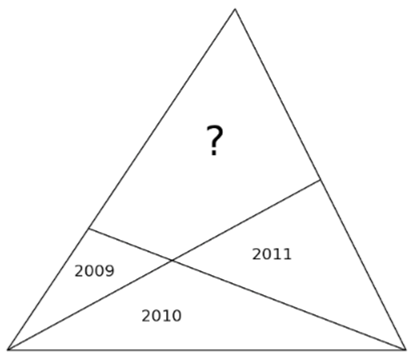
EXERCICE 9

Démontrer que :

$$2010<\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{4^2+1}{4^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\cdots+\frac{2010^2+1}{2010^2-1}<2010+\frac{1}{2}$$

EXERCICE 10

Un triangle est partagé par deux droites, à partir de deux de ses sommets, en trois triangles et un quadrilatère. Si les aires des trois triangles valent, comme présenté dans la figure ci-contre, 2009, 2010 et 2011, quelle est l'aire du quadrilatère ?



$\LaTeX\ 2_\varepsilon$, *c'est la perfection dans le traitement des textes scientifiques.*