Mercredi 17 Mai 2023

— Jour 1 —

1. Dans un triangle ABC tel que $AB < AC$, D est un point du segment $[AC]$ tel que $BD = CD$. Une droite parallèle à (BD) coupe le segment $[BC]$ en E et coupe la droite (AB) en F. G est le point d'intersection des droites (AE) et (BD).

   Montrer que $\widehat{BCG} = \widehat{BCF}$.

2. Trouver tous les nombres entiers naturels non nuls m et n qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que $m^3 + n^3$ divise $m^2 + 20mn + n^2$.

3. On considère la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ x_{n+1} &= cx_n + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

   Montrer que si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

PAMO COMMISSION

AMU

PAMO

Wednesday 17 May 2023

— Day 1 —

1. In a triangle ABC with $AB < AC$, D is a point on segment AC such that $BD = CD$. A line parallel to BD meets segment BC at E and line AB at F. Point G is the intersection of AE and BD.

   Show that $\angle BCG = \angle BCF$.

2. Find all positive integers m and n with no common divisor greater than 1 such that $m^3 + n^3$ divides $m^2 + 20mn + n^2$.

3. Consider a sequence of real numbers defined by:

$$x_1 = c$$
$$x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{for all } n \geq 1.$$

   Show that if c is a positive integer, then x_n is an integer for all $n \geq 1$.

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points