



Mercredi 17 Mai 2023

— Jour 1 —

1. Dans un triangle  $ABC$  tel que  $AB < AC$ ,  $D$  est un point du segment  $[AC]$  tel que  $BD = CD$ . Une droite parallèle à  $(BD)$  coupe le segment  $[BC]$  en  $E$  et coupe la droite  $(AB)$  en  $F$ .  $G$  est le point d'intersection des droites  $(AE)$  et  $(BD)$ .

Montrer que  $\widehat{BCG} = \widehat{BCF}$ .

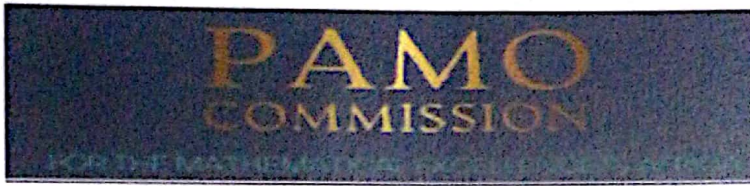
2. Trouver tous les nombres entiers naturels non nuls  $m$  et  $n$  qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que  $m^3 + n^3$  divise  $m^2 + 20mn + n^2$ .

3. On considère la suite de nombres réels définie par :

$$x_1 = c$$
$$x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2 - 1} \sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Montrer que si  $c$  est un nombre entier naturel non nul, alors  $x_n$  est un entier pour tout  $n \geq 1$ .

*Durée : 4 heures et 30 minutes*  
*Chaque problème vaut 7 points*



Wednesday 17 May 2023

— Day 1 —

1. In a triangle  $ABC$  with  $AB < AC$ ,  $D$  is a point on segment  $AC$  such that  $BD = CD$ . A line parallel to  $BD$  meets segment  $BC$  at  $E$  and line  $AB$  at  $F$ . Point  $G$  is the intersection of  $AE$  and  $BD$ .

Show that  $\angle BCG = \angle BCF$ .

2. Find all positive integers  $m$  and  $n$  with no common divisor greater than 1 such that  $m^3 + n^3$  divides  $m^2 + 20mn + n^2$ .
3. Consider a sequence of real numbers defined by:

$$x_1 = c$$
$$x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2 - 1} \sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{for all } n \geq 1.$$

Show that if  $c$  is a positive integer, then  $x_n$  is an integer for all  $n \geq 1$ .

*Time: 4 hours and 30 minutes  
Each problem is worth 7 points*