



Jeudi 18 Mai 2023

— Jour 2 —

4. Manzi possède n timbres et un album avec 10 pages. Il distribue les n timbres dans l'album de sorte que chaque page contienne un nombre distinct de timbres. Il trouve que, peu importe comment il fait cela, il y a toujours un ensemble de 4 pages tels que le nombre total de timbres dans ces 4 pages soit au moins $n/2$. Déterminer la valeur maximale possible de n .

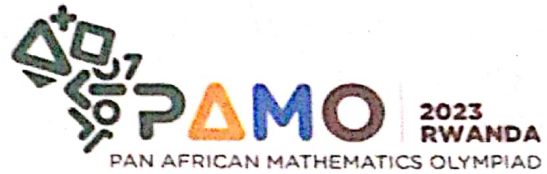
5. Soient a et b des nombres réels avec $a \neq 0$. Soit

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a + b)x^2 - 4bx + b.$$

Montrer que toutes les racines de $P(x)$ sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b$.

6. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus avec $AB < AC$. Soient D , E , et F les pieds des perpendiculaires issues de A , B , et C aux côtés opposés, respectivement. Soit P le pied de la perpendiculaire issue de F sur la droite (DE) . La droite (FP) et le cercle circonscrit au triangle BDF se rencontrent encore en Q . Montrer que $\widehat{PBQ} = \widehat{PAD}$.

*Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points*



Thursday 18 May 2023

— Day 2 —

4. Manzi has n stamps and an album with 10 pages. He distributes the n stamps in the album such that each page has a distinct number of stamps. He finds that, no matter how he does this, there is always a set of 4 pages such that the total number of stamps in these 4 pages is at least $n/2$. Determine the maximum possible value of n .

5. Let a and b be real numbers with $a \neq 0$. Let

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a + b)x^2 - 4bx + b.$$

Show that all roots of $P(x)$ are real and positive if and only if $a = b$.

6. Let ABC be an acute triangle with $AB < AC$. Let D , E , and F be the feet of the perpendiculars from A , B , and C to the opposite sides, respectively. Let P be the foot of the perpendicular from F to line DE . Line FP and the circumcircle of triangle BDF meet again at Q . Show that $\angle PBQ = \angle PAD$.

*Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points*