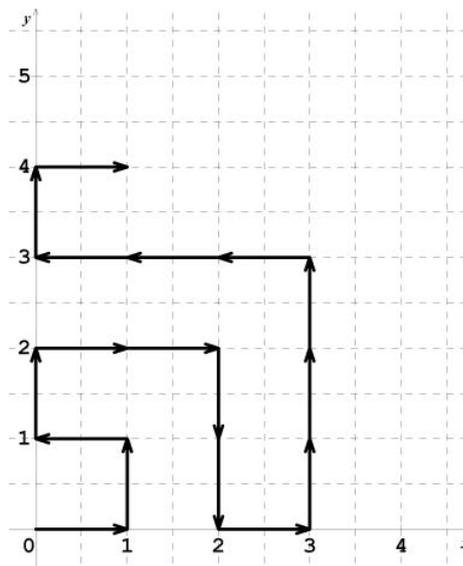


EXERCICE 1 : [15pts]

Un escargot se déplace dans le premier quadrant d'un repère plan. Partant de l'origine, il va d'un point de coordonnées entières à un autre, en se déplaçant d'une unité, parallèlement à un des deux axes chaque minute. La figure ci-contre indique comment l'escargot se déplace :



Quelles sont les coordonnées du point atteint après deux heures de déplacement ?

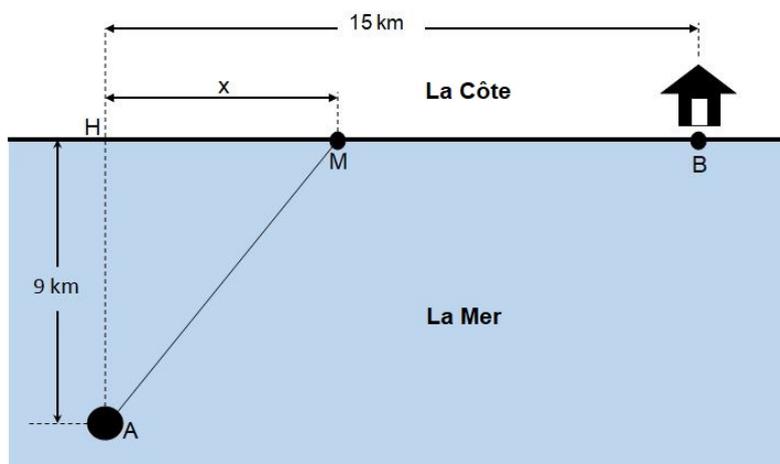
EXERCICE 2 : [15pts]

Le gardien d'un phare (Point A) situé en pleine mer, doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B) situé sur un promontoire.

Il se déplace en pirogue à la vitesse de 4km/h puis à pied à la vitesse de 5km/h.

On suppose qu'il n'y a pas de courant qui fait dériver la pirogue, et que la côte est rectiligne. Les dimensions utiles sont sur le dessin.

Où doit-il accoster (point M) pour que le temps de parcours soit minimale ?



EXERCICE 3 : [10pts]

Déterminer tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que $3a97 \times 4b8 = 171c366$ et $a + c = 2b$.

EXERCICE 4 : [10pts]

Soient a, b et c trois nombres complexes. Soient A, B et C les points ayant pour affixes respectifs a, b et c .

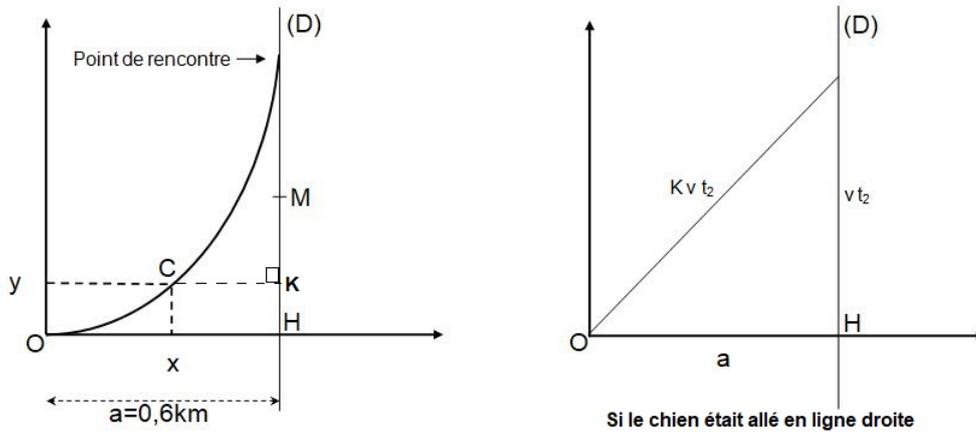
Démontrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac) = 0$

PROBLEME : [30pts]

Un homme et son chien sont initialement en deux points du plan distants de 600 m : L'homme en H et le chien en O. L'homme marche à 5km/h le long d'une demi-droite (D) perpendiculaire à (OH). Le chien court vers son maître à vitesse constante en se dirigeant toujours vers lui et le rattrape.

Si le chien avait eu un peu d'intelligence, il aurait pu anticiper la marche de son maître et le rejoindre en ligne droite, gagnant ainsi 15 précieuses secondes.

Le but de ce problème est de déterminer la vitesse du chien.



A l'instant t , le chien a pour coordonnées (x, y) où y est une fonction de x ; y' et y'' sont les dérivées de y en fonction de x .

A l'instant t , le chien est en C et le maître est en M .

Conditions initiales : à $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$ et $y' = 0$.

Dans tout ce qui suit, v est la vitesse du maître et kv est la vitesse du chien.

1- Justifier que $k > 1$.

2- Justifier que le coefficient directeur de la droite (CM) à l'instant t est $y' = \frac{vt-y}{a-x}$.

3- On pose $l = kvt$ la distance parcouru par le chien à l'instant t .

(a) Montrer que $(a-x)y' + y = \frac{l}{k}$.

(b) En déduire que $(a-x)y'' = \frac{1}{k}l'$ où l' est la dérivée de l par rapport à x .

4- On admet que $l'^2 = 1 + y'^2$ (cela provient du théorème de pythagore $dl^2 = dx^2 + dy^2$)

(a) Justifier que $(a-x)y'' = \frac{1}{k}\sqrt{1+y'^2}$, puis que $\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{k(a-x)}$.

(b) Montrer que $\ln(y' + \sqrt{1+y'^2})$ est une primitive de $\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}$.

(c) Montrer que $\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) = -\frac{1}{k}\ln(a-x) + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer que $C_1 = \frac{1}{k}\ln(a)$, puis que $y' + \sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{a}{a-x}\right)^{\frac{1}{k}}$.

5- On pose $Z = \left(\frac{a}{a-x}\right)^{\frac{1}{k}}$.

(a) Montrer que $(Z - y')^2 = 1 + y'^2$ et que $y' = \frac{1}{2}\left(Z - \frac{1}{Z}\right)$

(b) Justifier que $y' = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}} - \left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$.

(c) Montrer que $y = \frac{1}{2}\left(\frac{ka}{1-k}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{ka}{1+k}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right) + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer que $C_2 = \frac{ka}{k^2-1}$. Justifier que le chien rattrape son maître au temps $t_1 = \frac{ka}{v(k^2-1)}$.

6- (a) Montrer que si le chien était allé en ligne droite, il aurait rattrapé son maître au temps $t_2 = \frac{a}{v\sqrt{k^2-1}}$.

(b) Montrer que le gain de temps est $t_1 - t_2 = \frac{a}{v} \times \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{k^2-1}$.

(c) Montrer que k vérifie (E) : $25k^4 - 1440k^3 - 50k^2 + 1440k + 20761 = 0$

(d) Mettre (E) sous la forme $(k - k_0)(25k^3 - 1375k^2 - 3625k - 7985) = 0$ et en déduire la vitesse du chien.

(e) Justifier que (E) admet une autre solution k_1 dont on donnera un encadrement par deux entiers consécutifs. Expliquer pourquoi cette valeur ne peut convenir pour en déduire la vitesse du chien.

L^AT_EX 2_ε, c'est la perfection dans le traitement des textes scientifiques.