EDITION 2

Réflexion, Rapidité, Concision

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES DU MOUNGO
CATEGORIE JUNIOR(Première)
Samedi 14 Mars 2020 (08h-12h)

EXERCICE 1 : [4pts]
Un automobiliste effectue un trajet de $640\,km$ en $8h$. Il consomme 60 litres d'essence. Ce trajet comporte des portions de route, d'autoroute, et des traversées en montagne. On donne le tableau suivant :

Qualité du trajet	Route	Autoroute	Montagne
Vitesse moyenne en km/h	70	120	30
Consommation moyenne d'éssence en litres/100km	8	10	14

Calculer les distances x, y et z en km parcourus respectivement sur route, autoroute et en montagne.

EXERCICE 2 : [8pts]
Soit l'opération $\odot$ définie pour $x, y \in \mathbb{R}$ par $x \odot y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

1- (a) Calculer : $(-1) \odot (1)$, puis $\sqrt{24} \odot \sqrt{8}$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x \odot \frac{7}{24} = \frac{55}{48}$

On donnera les fractions éventuelles sous leurs formes irréductibles

2- (a) Montrer que $\sqrt{1+(x \odot y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{1+(x \odot x)^2} = 7$

EXERCICE 3 : [4pts]
On dispose de trois robinets Ro1, Ro2, Ro3 et d'un bassin.
Ensemble, Ro1 et Ro2 remplissent le bassin en 3h.
Ensemble, Ro1 et Ro3 remplissent le bassin en 4h.
Ensemble, Ro2 et Ro3 remplissent le bassin en 2h24min.

1- Déterminer le temps que met chaque robinet seul, pour remplir le bassin.

2- Déterminer le temps que mettent les 3 robinets tous ensemble, pour remplir le bassin.

EXERCICE 4 : [6pts]

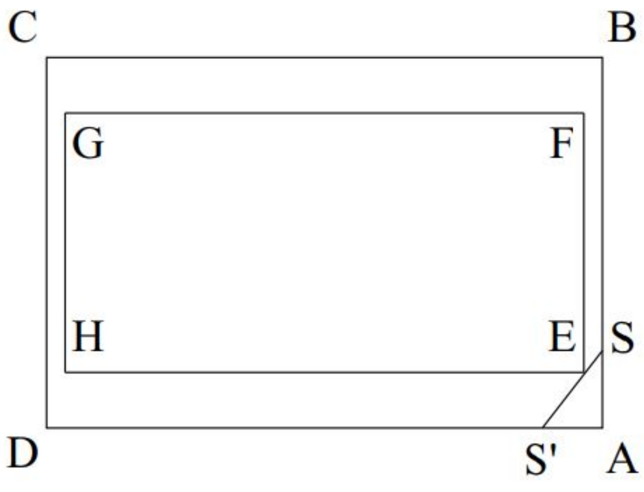
On dispose d'un cadre dont le bord extérieur est un rectangle $ABCD$ de dimensions $30cm$ et $20cm$. Le bord intérieur est aussi un rectangle $EFGH$.
Les deux bandes du cadre suivant les longueurs sont identiques. Il est est de même des bandes suivant les largeurs.
La bande suivant la largeur est large de $1cm$. La bande suivant la longueur est large de $3cm$.
On veut découper le coin A de ce cadre suivant la section $[SS']$ contenant le coin E comme indiqué sur la figure.

1- Déterminer la longueur SS' de la section sachant que $AS = AS'$.

2- Calculer la longueur de la section SS' lorsque S est en B.

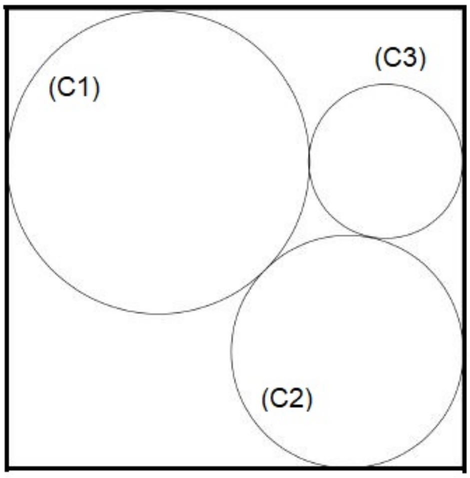
3- Même question lorsque S' est en D.

4- Calculer la longueur de la section lorsque $ES = ES'$.



EXERCICE 5 : [6pts]

Dans le carré suivant de côté 10cm, on a dessiné 3 cercles tangents entre eux, (C_1), (C_2) et (C_3).
(C_1) et (C_2) sont tangents à deux côtés du carré, (C_3) est tangent à un côté.
Soient Ω_1, Ω_2 et Ω_3 les centres et R_1, R_2 et R_3 les rayons respectifs de ces cercles.
1- Donner la distance entre Ω_1 et Ω_3
2- Donner la distance entre Ω_1 et Ω_2
3- Donner la distance entre Ω_2 et Ω_3.
4- Déterminer R_1, R_2 et R_3.



.

PROBLEME : [12pts]
Nous sommes le 14-03-2020.
Le but de l'exercice est de trouver un entier naturel M dont la racine carrée ait pour premières décimales exactement dans l'ordre les chiffres 14032020.
Cet entier M sera déterminé à la dernière question.

Pour tout entier naturel m, on note $D(m)$ le nombre d'entiers strictement compris entre m^2 et $(m+1)^2$.

1- Montrer que $D(3) = 6$ puis calculer $D(m)$ pour tout entier naturel m.

2- Une première décimale.
Pour tout entier naturel n, on note $L_1(n)$ la liste formée dans l'ordre par la première décimale de chacun des dix nombres $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \cdots, \sqrt{n+9}$. On reproduit ici les quatre premières décimales affichées par une calculatrice pour les nombres suivants :
$\sqrt{3} \approx 1,7320$ $\sqrt{4} = 2,0$ $\sqrt{5} \approx 2,2360$ $\sqrt{6} \approx 2,4494$ $\sqrt{7} \approx 2,6457$
$\sqrt{8} \approx 2,8284$ $\sqrt{9} = 3,0$ $\sqrt{10} \approx 3,1622$ $\sqrt{11} \approx 3,3166$ $\sqrt{12} \approx 3,46640$
On a $L_1(3) = (7;0;2;4;6;8;0;1;3;4)$
(a) Donner $L_1(7)$.
(b) Soit m_1 l'entier tel que $D(m_1) = 10$. On pose $n = m_1^2 + 1$.
Vérifier que $L_1(n) = (0;1;2;3;4;5;6;7;8;9)$.

3- Avec deux décimales.
Pour tout entier naturel n, on note $L_2(n)$ la liste ordonnée des entiers que forment les deux premières décimales de chacun des cent nombres $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \cdots, \sqrt{n+99}$.
Ainsi, on a $L_2(3) = (73;00;23;44;64;\cdots;04;09)$.
On cherche un entier naturel n tel que $L_2(n) = (00;01;02;04;05;\cdots;98;99)$
(a) Montrer qu'un tel entier n s'il existe, ne peut pas appartenir à l'un des intervalles :
$[1;2^2], [2^2;3^2], [3^2;4^2], \cdots, [49^2;50^2]$.
(b) Montrer que si $0 \leq N < 10^2$ alors $\left(\frac{10^2}{2} + \frac{N}{10^2}\right)^2 < \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\frac{10^2}{2} + \frac{N+1}{10^2}\right)^2$.
(c) Soit m_2 l'entier tel que $D(m_2) = 100$.
Calculer $n = m^2 + 1$ et montrer que $L_2(n) = (00;01;02;03;04;05;\cdots;98;99)$.

4- Donner un nombre entier naturel M tel que le nombre formé par les quatre premières décimales de $\sqrt{M}$ soit 2020, celui formé par les quatres premières décimales de $\sqrt{M+1}$ soit 2021 et celui formé par les quatre premières décimales de $\sqrt{M+2}$ soit 2022.

5- Donner un nombre entier naturel M tel que le nombre formé par les huit premières décimales de $\sqrt{M}$ soit 14032020.

$\LaTeX\ 2_\varepsilon$, c'est la perfection dans le traitement des textes scientifiques.