

Pi-Day Competition || Édition de Mars 2023 || Épreuve de Première || Durée 04 heures.

Consignes : Répondez au maximum de questions possibles en commençant par celles que vous voulez.

Dans tout ce qui suit, le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Vous devez reconnaître les thèmes dont les questions se suivent.

1- Résoudre dans \mathbb{R} : $x^2 + 10x - 75 = 0$

2- On donne le polynôme : $P(x) = x^3 + \frac{49}{5}x^2 - 77x + 15$. Parmi les nombres suivants : $-3, \frac{1}{5}$ et 1 lequel est racine de P ?

3- Résoudre l'équation $P(x) = 0$

4- Résoudre dans \mathbb{R} : $\sqrt{3x + 16} = x - 4$

5- Résoudre dans \mathbb{R} : $P(x) \geq 0$

6- Résoudre dans \mathbb{R} : $\sqrt{3x + 16} < x - 4$

7- Un rectangle a pour périmètre $P = 654m$ et pour aire $A = 19422m^2$. Quelles sont ses dimensions ?

8- Soit le système :
$$\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 63 \\ -5x + 2y - 7z = -106 \\ 9x + 11y - 19z = -74 \end{cases}$$

Que vaut x ?

9- Que vaut y ?

10- Que vaut z ?

11- Soit $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \hline x^2 - 3x & -x + 3 & 2x - 11 \\ \hline \end{array}$. Pour

quelle(s) valeur(s) de x G n'est-il pas un barycentre ?

12- Existe-t-il une valeur de x pour laquelle G est isobarycentre ?

13- On admet que ABC est un triangle équilatéral de côté 12 cm.

Pour $x = 2$, calculer AG .

14- Calculer BG .

15- Calculer CG .

16- On pose $L_k : -2\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 7\overline{MC}^2 = k$.

Déterminer k pour que L_k soit un cercle de centre G et de rayon 4.

17- On pose $A(-6, 6)$, $B(12, 6)$ et $C(-6, 18)$.

Déterminer les coordonnées de G pour $x = 2$.

18- Déterminer la mesure principale de $\frac{247\pi}{6}$.

19- Soient \vec{u} et \vec{v} tel que $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{5\pi}{12}$.

Calculer $\text{mes}(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}})$.

20- $ABCD$ est un losange de sens indirect tel que $\text{mes}\widehat{BAD} = \frac{\pi}{6}$. Déterminer $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}})$.

21- On donne $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tels que $\cos x = \frac{3}{5}$ et $\cos y = \frac{1}{3}$. Calculer $\sin(2x - y)$.

22- Sachant $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$.

23- Calculer $\sin \frac{5\pi}{12}$

24- Calculer $\tan \frac{5\pi}{12}$

25- Calculer $\cos \frac{7\pi}{12}$

26- Calculer $\cos \frac{5\pi}{24}$

27- Calculer $\sin \frac{5\pi}{24}$

28- Calculer $\tan \frac{5\pi}{24}$

29- Résoudre dans $[-\pi, \pi[$: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

30- Résoudre dans $[-\pi, \pi[$: $\sin x = \frac{1}{2}$

31- Résoudre dans $[-\pi, \pi[$: $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

32- Résoudre dans $[-\pi, \pi[$: $\cos x = \sin \frac{\pi}{12}$

33- Résoudre dans $[-\pi, \pi[$: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

34- Résoudre dans $[0, 2\pi[$: $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

35- Résoudre dans $[0, 2\pi[$: $\tan x < -\sqrt{3}$

36- Déterminer le domaine de définition de $f_1(x) = \frac{1}{x}$

37- Même question pour $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

38- Même question pour $f_3(x) = \frac{x+2}{2x-5}$

39- Même question pour $f_4(x) = \frac{1}{\cos x}$

40- Idem pour $f_5(x) = \frac{1}{x^2-16} + \sqrt{x^2 + 3x - 15}$

41- Calculer $f_1 \circ f_3(x)$

42- Calculer $f_3 \circ f_1(x)$

43- Calculer la dérivée de $f_3(x)$.

44- Calculer la dérivée de $f_2(x)$.

45- Laquelle des fonctions suivantes est paire ?

$x \mapsto x^2 + x^3$ et $x \mapsto \sin(x^2)$.

46- Déterminer la période de $x \mapsto \cos x$

47- Déterminer la période de $x \mapsto \cos 4x$

48- Déterminer la période de $x \mapsto \tan \frac{x}{4}$

49- Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x-5}$.

50- Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- 51-** Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.
- 52-** Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{\sqrt{x+4} - 3}$.
- 53-** Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow 3^<} \frac{x^2 - 15x + 1}{3 - x}$
- 54-** Soit $f_6(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Définir $f_6^{-1}(x)$ sur $] -2, +\infty[$.
- 55-** Même question pour $f_7(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, +\infty[$
- 56-** Soit $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$. Déterminer le domaine de définition.
- 57-** Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 58-** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 59-** Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^<} f(x)$
- 60-** Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^>} f(x)$
- 61-** Calculer $f'(x)$
- 62-** Préciser les extremums de f .
- 63-** Établir le tableau de variation de f .
- 64-** Déterminer l'équation de la tangente en -3
- 65-** Préciser le centre de symétrie de cette courbe.
- 66-** Représenter la courbe C de f .
- 67-** On définit la suite (v_n) par :
- $$v_n = \begin{cases} v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 + 10v_n \end{cases} \quad \text{Calculer } v_2.$$
- 68-** Calculer v_5
- 69-** Soit (u_n) une suite arithmétique telle que :
 $u_5 = 17$ et $u_{21} = 129$.
 Quelle est la raison de cette suite ?
- 70-** Que vaut le premier terme ?
- 71-** Déterminer le terme général de cette suite.
- 72-** Calculer u_{100}
- 73-** Calculer $S_{100} = u_0 + u_1 + \dots + u_{99}$.
- 74-** Une population augmente de 10% par rapport à l'année précédente.
 Soit w_n la population à l'année $2020 + n$.
 A l'année 2020, $w_0 = 500\,000$. Calculer w_1 .
- 75-** Calculer w_2 .
- 76-** Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n .
- 77-** A partir de quelle année, cette population aura triplé en effectif ?
- 78-** On donne le tableau statistique donnant la répartition des notes en mathématiques dans une $Classe_1$:

Notes	[6,8[[8,10[[10,12[[12,14[[14,16[
n_i	8	14	16	7	5

Combien y'a-t-il d'élèves ?

- 79-** Combien d'élèves ont une note supérieure à 10 ?
- 80-** Calculer la moyenne \bar{x}
- 81-** Calculer l'écart-type σ .
- 82-** Une autre $Classe_2$ contient 80 élèves. La somme des carrés des notes en mathématiques vaut 5360, et la variance 3. Calculer la moyenne des notes \bar{x}_2 .
- 83-** En se fondant sur la moyenne, quelle est la meilleure classe ?
- 84-** En se fondant sur l'écart-type, quelle est la classe avec moins de disparité ?
- 85-** Soit (D_1) la droite passant par $A(-5, 6)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(11, -3)$. (D_2) la droite perpendiculaire à (D_1) et passant par $B(-2, 3)$.
 Quelle est le coefficient directeur de (D_1) ?
- 86-** Quel est le coefficient directeur de (D_2) ?
- 87-** Déterminer le point d'intersection des deux droites.
- 88-** Déterminer la distance de B à (D_1) .
- 89-** Soient les cercles $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 4x - 12y + 31 = 0$ et \mathcal{C}_2 de centre $\Omega_2(2; 3)$ et de rayon $R_2 = 4$.
 Quel est le centre de \mathcal{C}_1 ?
- 90-** Quel est le rayon de \mathcal{C}_1 ?
- 91-** Déterminer les points d'intersection de (D_1) et \mathcal{C}_2
- 92-** Les deux cercles se rencontrent en P_1 et P_2 avec $y_{P_1} < y_{P_2}$.
 Donner les coordonnées de P_1 .
- 93-** Donner les coordonnées de P_2 .
- 94-** Dans l'espace, on considère le vecteur $\vec{n}(-1, 4, 2)$.
 Déterminer un vecteur \vec{n}' d'abscisse 5 qui est orthogonal à \vec{n} .
- 95-** Soit $ABCD$ un carré de sens direct, I milieu de $[AB]$, J milieu de $[BC]$.
 Déterminer l'application $t_{\vec{AD}} \circ t_{\vec{AB}}$.
- 96-** Déterminer l'application $S_{(IJ)} \circ S_{(BC)}$.
- 97-** Déterminer l'application $R_{(A, \frac{\pi}{4})} \circ R_{(B, -\frac{\pi}{4})}$
- 98-** Soit l'application linéaire φ de \mathbb{R}^2 , telle que :
 $\varphi(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j}$
 Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
- 99-** Déterminer $\text{Ker}\varphi$, le noyau de φ .
- 100-** Déterminer $\text{Im}\varphi$, l'image de φ .